第 2 节 函数零点小题策略：含参（★★★☆）

强化训练

1．（2022·赤峰模拟·★★）已知函数 $f(x)=3x-a\mathrm{e}^x$ 有两个零点，则实数 a 的取值范围为（　　）

（A）$(-\infty,\frac{3}{\mathrm{e}})$　（B）$(0,\frac{3}{\mathrm{e}})$　（C）$(0,\frac{\mathrm{e}}{3})$　（D）$(-\infty,\frac{\mathrm{e}}{3})$

答案：B

解法 1：$f(x)=0\Leftrightarrow 3x-a\mathrm{e}^x=0\Leftrightarrow 3x=a\mathrm{e}^x$，两端同除以 e^x，即可全分离，

$3x=a\mathrm{e}^x\Leftrightarrow a=\frac{3x}{\mathrm{e}^x}$，所以问题等价于直线 $y=a$ 与函数 $y=\frac{3x}{\mathrm{e}^x}$ 的图象有 2 个交点，

设 $g(x)=\frac{3x}{\mathrm{e}^x}(x\in\mathbf{R})$，则 $g'(x)=\frac{3(1-x)}{\mathrm{e}^x}$，所以 $g'(x)>0\Leftrightarrow x<1$，$g'(x)<0\Leftrightarrow x>1$，

从而 $g(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上↗，在 $(1,+\infty)$ 上↘，

又 $g(1)=\frac{3}{\mathrm{e}}$，$\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=-\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$，所以 $g(x)$ 的大致图象如图 1，

由图可知当且仅当 $0<a<\frac{3}{\mathrm{e}}$ 时，直线 $y=a$ 与 $g(x)$ 的图象有 2 个交点，故 $a\in(0,\frac{3}{\mathrm{e}})$.

解法 2：$f(x)$ 的两部分都能作图，故用半分离也行，$f(x)=0\Leftrightarrow 3x-a\mathrm{e}^x=0\Leftrightarrow 3x=a\mathrm{e}^x$，

为了作图方便，两端同除以 a，先考虑 $a=0$ 的情形，

当 $a=0$ 时，方程 $3x=a\mathrm{e}^x$ 即为 $3x=0$，所以 $x=0$，故 $f(x)$ 只有 1 个零点，不合题意；

当 $a\neq0$ 时，$3x=a\mathrm{e}^x\Leftrightarrow\frac{3}{a}x=\mathrm{e}^x$，注意到直线 $y=\mathrm{e}x$ 与函数 $y=\mathrm{e}^x$ 的图象相切，如图 2，

由图可知当且仅当 $\frac{3}{a}>\mathrm{e}$ 时，$y=\frac{3}{a}x$ 与 $y=\mathrm{e}^x$ 有两个交点，所以 $0<a<\frac{3}{\mathrm{e}}$.

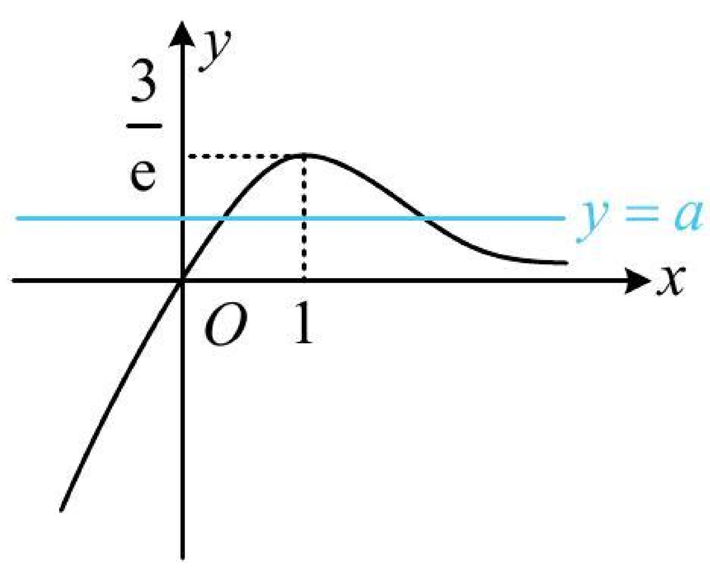


图1

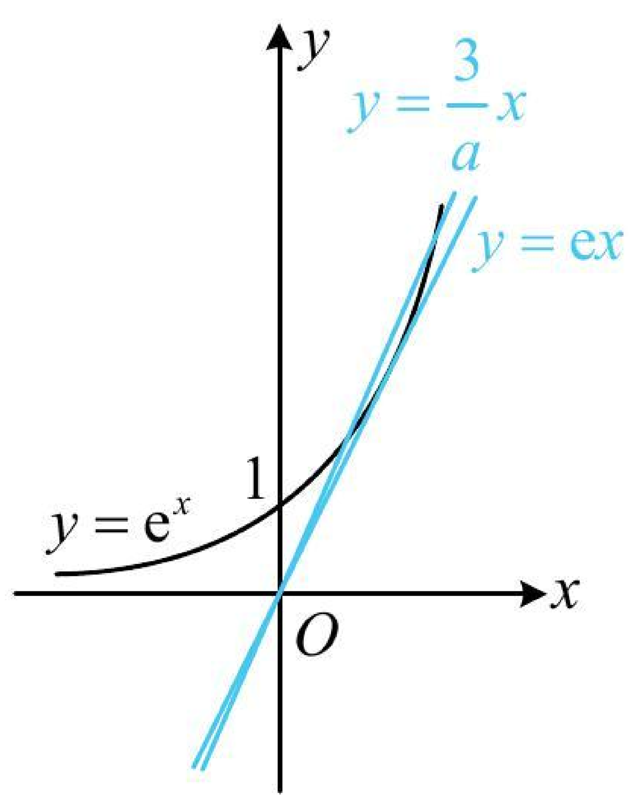


图2

2．（★★★）（多选）设函数 $f(x)=\begin{cases}|\ln x|,x>0\\(x+1)\mathrm{e}^x,x\leq0\end{cases}$，若函数 $g(x)=f(x)-b$ 有 3 个零点，则实数 b 的取值可能是（　　）

（A）0　（B）$\frac{1}{2}$　（C）1　（D）2

答案：BC

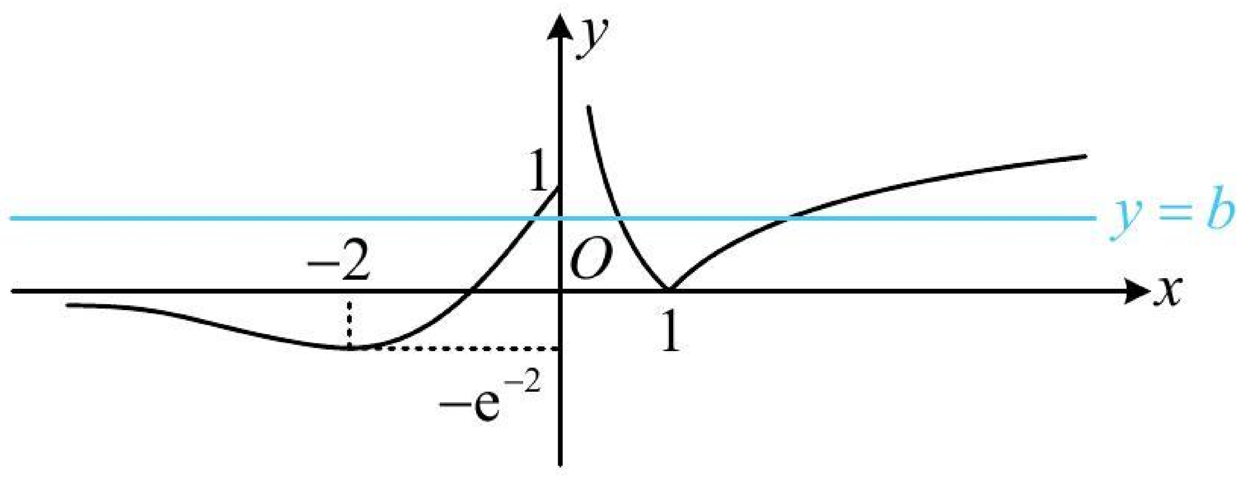
解析：先将参数 b 全分离出来，便于作图研究交点，$g(x)=0\Leftrightarrow f(x)=b$，

当 $x\le 0$ 时，$f(x)=(x+1)e^x$，$f'(x)=(x+2)e^x$，所以 $f'(x)<0\Leftrightarrow x<-2$，$f'(x)>0\Leftrightarrow -2<x\le 0$，

故 $f(x)$ 在 $(-\infty,-2)$ 上↘，在 $(-2,0]$ 上↗，$f(0)=1$，$f(-2)=-\frac{1}{e^2}$，且当 $x\to-\infty$ 时，$f(x)\to 0$，

据此可作出 $f(x)$ 的草图如图，$g(x)$ 有 3 个零点等价于直线 $y=b$ 与 $f(x)$ 的图象有 3 个交点，

由图可知 $0<b\le 1$，故选 B、C.



3.（2019 • 天津卷 • ★★★）已知函数 $f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x},0\le x\le 1\\ \frac{1}{x},x>1\end{cases}$，若关于 x 的方程 $f(x)=-\frac{1}{4}x+a$ 恰有两个互异的实数解，则 a 的取值范围为（　　）

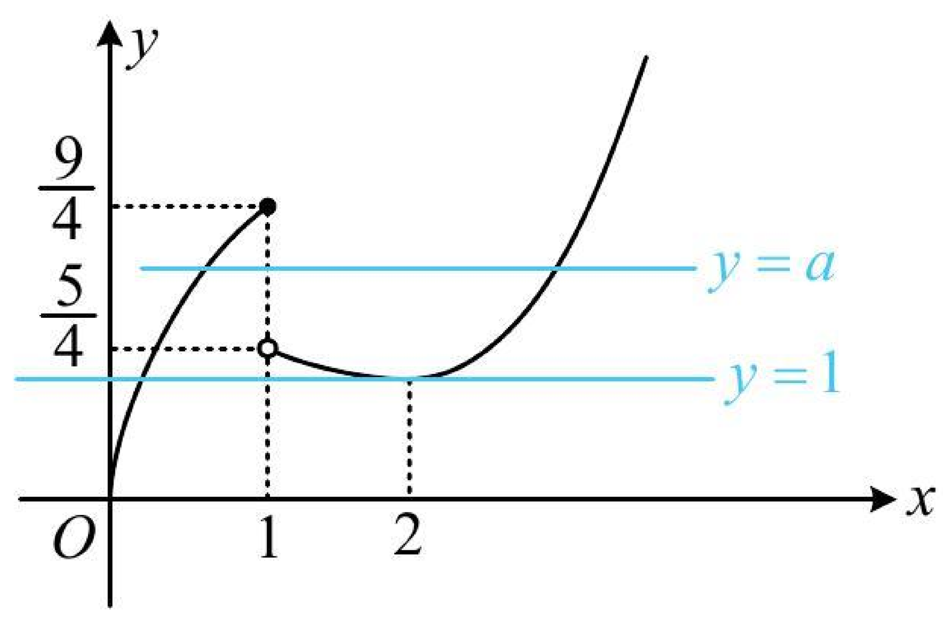
（A）$[\frac{5}{4},\frac{9}{4}]$　（B）$(\frac{5}{4},\frac{9}{4}]$　（C）$(\frac{5}{4},\frac{9}{4}]\cup\{1\}$　（D）$[\frac{5}{4},\frac{9}{4}]\cup\{1\}$

答案：D

解析：先全分离，转化为水平直线与函数图象交点问题，$f(x)=-\frac{1}{4}x+a\Leftrightarrow f(x)+\frac{1}{4}x=a$，

令 $g(x)=f(x)+\frac{1}{4}x$，则 $g(x)=\begin{cases}2\sqrt{x}+\frac{x}{4},0\le x\le 1\\ \frac{1}{4}(x+\frac{4}{x}),x>1\end{cases}$，作出函数 $y=g(x)$ 的图象如图，

当且仅当 $a=1$ 或 $\frac{5}{4}\le a\le\frac{9}{4}$ 时，直线 $y=a$ 与 $y=g(x)$ 的图象有 2 个交点，满足题意.



【反思】本题用半分离方法直接作图研究 $y=f(x)$ 和 $y=-\frac{1}{4}x+a$ 的交点也行，但模型更复杂，不妨自行尝试.

4.（2022 • 济宁二模 • ★★★）已知函数 $f(x)=\begin{cases}x,x\le 0\\ a\ln x,x>0\end{cases}$，若函数 $g(x)=f(x)-f(-x)$ 有 5 个零点，则实

数 a 的取值范围是（　　）

（A）$(-\mathrm{e},0)$　　（B）$(-\frac{1}{\mathrm{e}},0)$　　（C）$(-\infty,-\mathrm{e})$　　（D）$(-\infty,-\frac{1}{\mathrm{e}})$

答案：C

解析：观察可得 $g(x)$ 为奇函数，可先用对称性将研究的范围缩小，

由题意，$g(-x)=f(-x)-f(x)=-g(x)$，所以 $g(x)$ 为奇函数，

由对称性，$g(x)$ 有 5 个零点等价于 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有 2 个零点，接下来在 $(0,+\infty)$ 上考虑，

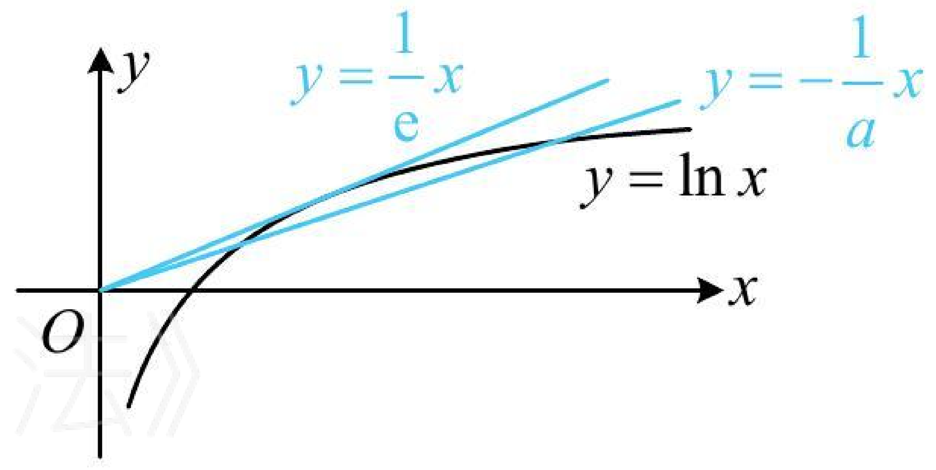
当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$g(x)=a\ln x-(-x)=a\ln x+x$，所以 $g(x)=0\Leftrightarrow a\ln x+x=0\Leftrightarrow a\ln x=-x$，

接下来全分离、半分离均可，我们以半分离为例，两端同除以 a，转化为直线 $y=-\frac{x}{a}$ 与 $y=\ln x$ 有 2 个交点来研究，

当 $a=0$ 时，$a\ln x=-x$ 即为 $0=-x$，所以 $x=0$，不满足题意；

当 $a\neq0$ 时，$a\ln x=-x\Leftrightarrow\ln x=-\frac{x}{a}$，如图，曲线 $y=\ln x$ 过原点的切线为 $y=\frac{1}{\mathrm{e}}x$，

所以要使 $y=-\frac{x}{a}$ 与 $y=\ln x$ 有 2 个交点，应有 $0<-\frac{1}{a}<\frac{1}{\mathrm{e}}$，故 $a<-\mathrm{e}$.



5.（2022·烟台模拟·★★★★）已知函数 $f(x)=\begin{cases}|\ln x|,x>0\\x^2+2x-1,x\le0\end{cases}$，若方程 $f(x)=ax-1$ 有 3 个实根，则实数 a 的取值范围是（　　）

（A）$(0,1)$　　（B）$(0,2)$　　（C）$(1,+\infty)$　　（D）$(2,+\infty)$

答案：B

解法 1：观察可得方程 $f(x)=ax-1$ 中参数 a 可以全分离，故先试试全分离，

由题意，$f(0)=-1$，所以 $x=0$ 是方程 $f(x)=ax-1$ 的 1 个实根；

当 $x\neq0$ 时，$f(x)=ax-1\Leftrightarrow a=\frac{f(x)+1}{x}$，由题意，直线 $y=a$ 与函数 $y=\frac{f(x)+1}{x}$ 的图象应有 2 个交点，

设 $g(x)=\frac{f(x)+1}{x}(x\neq0)$，则 $g(x)=\begin{cases}\frac{|\ln x|+1}{x},x>0\\x+2,x<0\end{cases}$，要画 $g(x)$ 的图象，需将 $x>0$ 的部分去绝对值、求导，

当 $0<x<1$ 时，$g(x)=\frac{1-\ln x}{x}$，所以 $g'(x)=\frac{\ln x-2}{x^2}<0$，故 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上↘，

当 $x>1$ 时，$g(x)=\frac{\ln x+1}{x}$，所以 $g'(x)=-\frac{\ln x}{x^2}<0$，故 $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上↘，

又 $\lim\limits_{x\to0^+}g(x)=+\infty$，$g(1)=1$，$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$，所以 $g(x)$ 的大致图象如图 1，

由图可知当且仅当 $0<a<2$ 时，直线 $y=a$ 与函数 $y=\dfrac{f(x)+1}{x}$ 的图象有 2 个交点.

解法 2：本题半分离也可行，但模型较复杂，下面直接作图研究直线 $y=ax-1$ 和 $y=f(x)$ 的图象的交点，以切线 l_1 和水平线作为临界状态讨论，

如图 2，直线 l_1 是 $f(x)$ 的图象在点 $(0,-1)$ 处的切线，当 $x<0$ 时， $f'(x)=2x+2$，所以该切线的斜率为 2，由图可知 l_1 与 $f(x)$ 的图象有 2 个交点，不合题意；

当 $a>2$ 时，直线 $y=ax-1$ 如图中的 l_3， l_3 与 $f(x)$ 的图象有 2 个交点，不合题意；

当 $0<a<2$ 时，如图中的 l_2，两图象有 3 个交点，满足题意；

当 $a\le 0$ 时，如图中的 l_4，两图象有 2 个交点，不合题意；

综上所述，实数 a 的取值范围是 $(0,2)$.

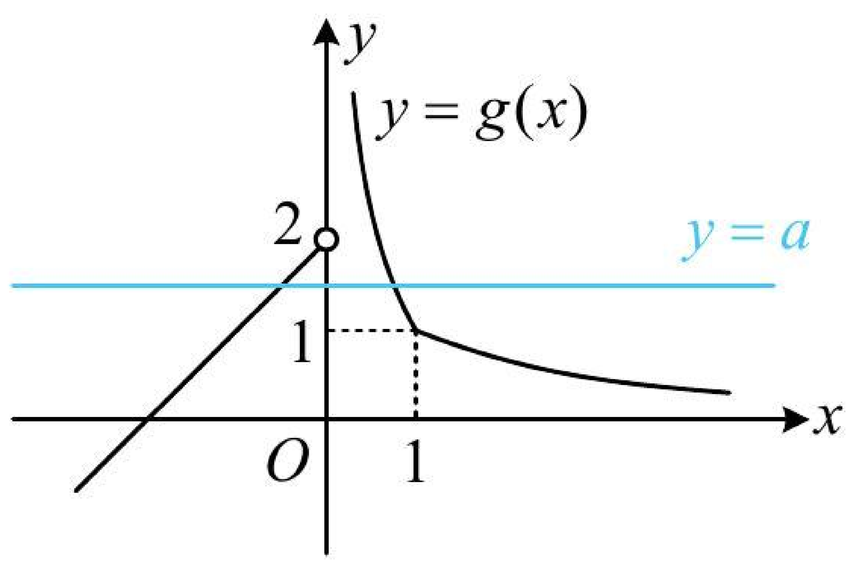


图1

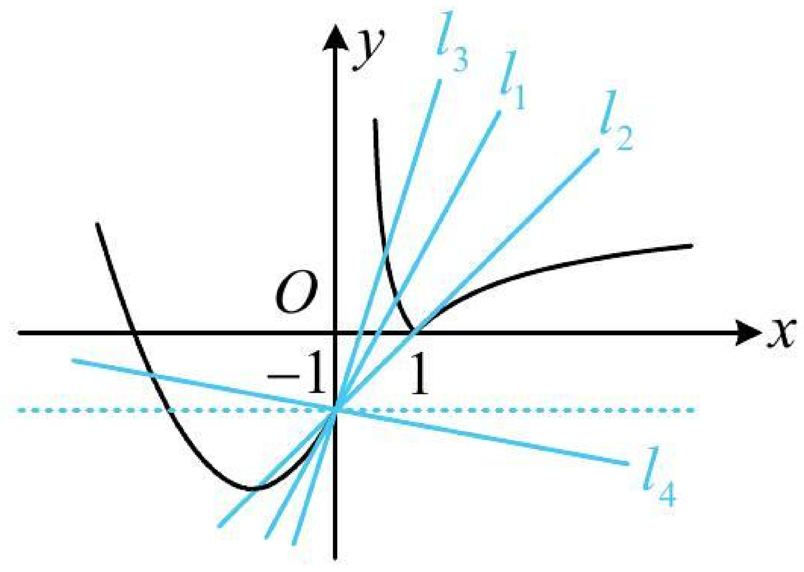


图2

6.（2022•安徽模拟•★★★★）已知函数 $f(x)=ax-\ln x(a\in\mathbf{R})$ 有两个零点，分别为 x_1， x_2，且 $2x_1<x_2$，则 a 的取值范围是（　　）

（A）$(-\infty,\dfrac{\ln 2}{2})$　（B）$(0,\dfrac{\ln 2}{2})$　（C）$(\dfrac{\ln 2}{2},\dfrac{1}{\mathrm{e}})$　（D）$(\dfrac{\ln 2}{2},+\infty)$

答案：B

解析：先将 $f(x)=0$ 半分离， $f(x)=0\Leftrightarrow ax=\ln x$ ，注意到直线 $y=\dfrac{1}{\mathrm{e}}x$ 与曲线 $y=\ln x$ 相切于 $x=\mathrm{e}$ 处，如图，

所以当且仅当 $0<a<\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 时，直线 $y=ax$ 与曲线 $y=\ln x$ 有 2 个交点，

那怎样才能满足题干规定的 $2x_1<x_2$ 呢？可以这么看，当 $0<a<\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 时，若 a 增大，则 x_1 增大， x_2 减小，所以 $\dfrac{x_2}{x_1}$ 减小，故只需求出 a 在 $\dfrac{x_2}{x_1}=2$ 时的临界值即可，

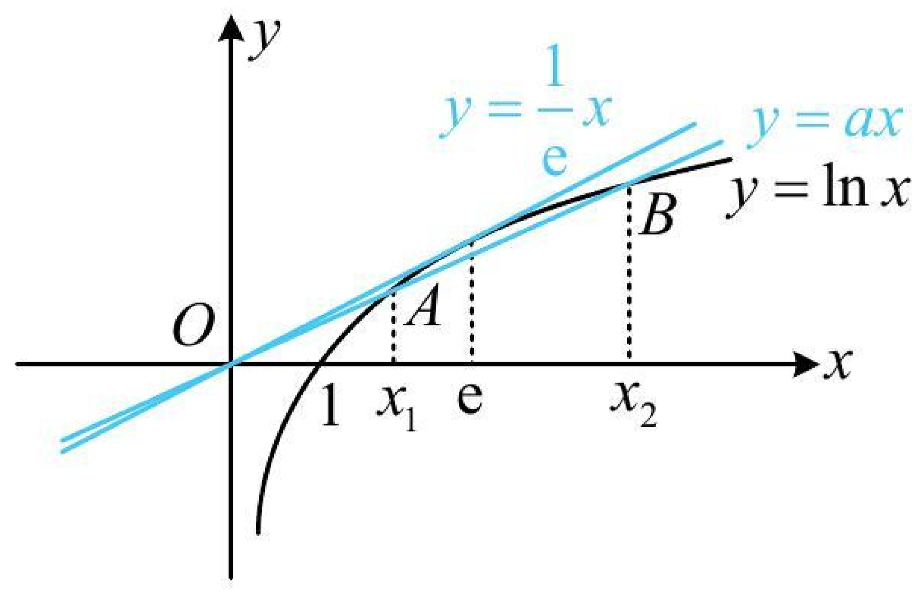
设此时 $y=ax$ 与 $y=\ln x$ 的两个交点分别为 A 和 B，如图，

因为 $x_2=2x_1$，且 A，B 都在直线 $y=ax$ 上，所以 $A(x_1,ax_1)$， $B(2x_1,2ax_1)$，

又 A，B 两点也都在曲线 $y=\ln x$ 上，所以 $\begin{cases} ax_1=\ln x_1 & ① \\ 2ax_1=\ln(2x_1) & ② \end{cases}$，

②−①可得： $ax_1=\ln 2$，代入①可得 $x_1=2$，所以 $a=\dfrac{\ln 2}{2}$，

由图可知 a 越小， $\dfrac{x_2}{x_1}$ 越大，所以 $0<a<\dfrac{\ln 2}{2}$ 满足题意.


y
$y=\frac{1}{e}x$
$y=ax$
$y=\ln x$
B
A
O
x
1
x_1
e
x_2